

# 論文

## ウェーブレットによる不均等標本化定理

陳 文<sup>†</sup> 伊藤 秀一<sup>†</sup> 志記 潤二<sup>‡</sup>

Sampling Theorems by Wavelets for Irregularly Sampled Signals

Wen CHEN<sup>†</sup>, Shuichi ITOH<sup>†</sup>, and Junji SHIKI<sup>‡†</sup>

あらまし 不均等な標本化によって得られたデータから元の信号をスケーリング関数によって再現する方法を示した。Walter, Paley-Wiener の結果を一般化し、標本化時点の偏差が対称であるという制約を不要とした。また Paley-Wiener ではすべての標本化時点での最大偏差に対する制約があったが、ここでは合計の偏差に対する制約の条件になっている。スケーリング関数が直交、双直交を含む一般形の場合について成り立つ標本化定理を示した。

キーワード ウェーブレット、標本化定理、スケーリング関数、直交、双直交

### 1. まえがき

連続時間の信号をデジタル記録したり、デジタル通信システムによって伝送しようとすると、時間を離散化するために必ず標本化という処理を経なければならぬ。良く知られているように Nyquist の標本化は次のように定式化できる。

有限エネルギーで帯域幅  $\sigma$  の連続的信号  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  すなわち  $\text{supp} \hat{f}(\omega) \subset [-\sigma, \sigma]$  および  $f \in L^2(\mathbb{R})$  のときには標本化定理より  $f(t)$  は

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \frac{\sin \sigma(t - nT)}{\sigma(t - nT)}, \quad (1)$$
$$T \leq \frac{\pi}{\sigma}, \quad t \in \mathbb{R}$$

で表される。ここで  $\hat{f}$  は  $f(t)$  のフーリエ変換で、

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2)$$
$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

である。

ところでこの問題は次のようにおくとウェーブレット部分空間における信号表現の特別な場合であると見

ることができる。すなわち  $\sigma$  を  $\sigma = 2^m \pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  のように表し、スケーリング関数を  $\varphi(t) = \sin \pi t / \pi t$  とすると、 $\varphi(t)$  は dilation の式

$$\varphi(t) = \sum_k \frac{\sin \pi k/2}{\pi k/2} \varphi(2t - k), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

を満たし、多重解像度解析 (Multi Resolution Analysis) MRA =  $\{V_m = \overline{\text{span}}\{\varphi(2^m t - n)\}_n\}_m$  を得ることができる。Walter [4] はこの点に注目し、更に一般的なウェーブレットのクラスによる表現を導いた。すなわちある緩やかな条件の下にスケーリング関数  $\varphi(t)$  を定義し、 $q(s, t) = \sum_n \varphi(s - n) \varphi(t - n)$ ,  $\hat{\varphi}^*(\omega) = \sum_n \varphi(n) e^{in\omega}$  とおくと  $\hat{\varphi}^*(\omega) \neq 0$  ならば  $\{q(s, n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は  $V_0$  の Riesz 基底となる。更に  $\{q(s, n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  と双直交をなす基底を  $\{S_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  と表せば、 $S_n(t) = S_0(t - n)$  を満たし、 $f \in V_0$  は

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) S_0(t - n) \quad (4)$$

と表されることを導いた。この結果から、信号のサンプル値から元の信号を再生する標本化の問題が、さまざまなウェーブレットによって更に一般的に表現できることとなった。

ところで標本化の中には自然標本化のように必ずしも厳密に一定周期で行われないものや、サンプリング時点にジッタが含まれて不均等な標本化となる場合がある。また、例えば通信路のふくそうや符号化による不均一な時間遅れのあるシステムにおいては、不均等

<sup>†</sup> 電気通信大学大学院情報システム学研究科、調布市  
Graduate School of Information Systems, University of Electro-Communications, Chofu-shi, 182 Japan  
<sup>‡</sup> 電気通信大学電子工学科、調布市  
Department of Electronic Engineering, University of Electro-Communications, Chofu-shi, 182 Japan

なサンプリングを可能とすればシステムの構成を容易にすることも考えられる。このように不均等な標本化を許せば、信号処理の自由度を広げることができて、これまでにない新たなシステムを考案できる可能性が期待される。

それでは周期が一定でなく不均一なサンプリングが行われたときの標本化についてはどのような結果が知られているであろうか? Young[6]によれば Paley-Wiener は不均等サンプリングによる標本化の問題を取り扱い、もし  $|t_k - k| \leq l < 1/4$ かつ  $t_k = -t_{-k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  であれば、任意の  $f \in V_0$  に対して、

$$f(t) = \sum_k f(t_k) S_k(t)$$

となる系列  $\{S_k(t)\}_k \subset V_0$  が存在することを示した。

本論文では Paley-Wiener の結果を更に一般化し、直交ウェーブレット関数空間と双直交ウェーブレット関数空間において  $t_k = -t_{-k}$  の制約を取り除いた不均等標本化定理を述べる。更に一般的なウェーブレット関数空間においても同様の信号再生のできることを述べ、その例を示す。

## 2. 直交ウェーブレット関数空間における不均等な標本化

[定理 1]  $\varphi(t)$  を MRA  $\{V_m\}_m$  における連続な正規直交スケーリング関数とし、次の条件を満たすものとする。

(1) ある  $\varepsilon > 0$  に対して  $\varphi(t) = O(1/|t|^{1+\varepsilon})$ ,  $|t| \rightarrow \infty$  が成り立つ。

(2)  $\varphi(t)$  は各区間  $(n, n+1)$  において微分可能であり、 $\sum_n \sup_{(n, n+1)} |\varphi'(t)| < \infty$  である。

(3)  $\hat{\varphi}^*(\omega) \neq 0$  が成り立つ。

このとき系列  $\{\delta_n\}_n \subset (-1, 1)$  が

$$\sum_n |\delta_n| < \frac{\inf_{0 \leq \omega \leq 2\pi} |\hat{\varphi}^*(\omega)|}{\sum_n \sup_{U_o(n, \delta)} |\varphi'(x)|} \quad (5)$$

但し

$$\delta = \sup_k |\delta_k|, \quad \sum_n \sup_{U_o(n, \delta)} |\varphi'(x)| \neq 0$$

を満たすならば、任意の  $f(t) \in V_0$  に対して、

$$f(t) = \sum_n f(n + \delta_n) S_n(t) \quad (6)$$

となる系列  $\{S_n(t)\}_n \subset V_0$  が存在する。ここで  $U_o(n, \delta)$  は  $n$  の  $|\delta|$ -近傍から  $n$  を取り除いた領域である。

定理 1 の証明にはまず次の二つの補題が必要である。このうち補題 1 は Diestel[2] p.46 の定理 9 と同じである。

[補題 1] ([2] の定理 9)  $\{z_n\}_n$  を Banach 空間  $(X, \|\cdot\|)$  の中の basic sequence<sup>(注 1)</sup>であるとする。 $X$  上に Hahn-Banach の意味で拡張をした  $\{z_n\}_n$  に関する係数汎関数<sup>(注 2)</sup>の列を  $\{z_n^*\}_n$  とし、 $\{y_n\}_n$  を  $X$  上の系列とする。もし

$$\sum_n \|z_n^*\| \|z_n - y_n\| < 1$$

が成り立てば、 $\{y_n\}_n$  は  $\{z_n\}_n$  と等価な basic sequence である。

以下ではノルムは  $L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\|f\| = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

にとり、

$$\|f\|_{L^2(0, 2\pi)} = \left( \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

とする。

[補題 2]  $\varphi(t)$  を MRA  $\{V_m\}_m$  上の連続な正規直交スケーリング関数とし、ある  $\varepsilon > 0$  に対して  $\varphi(t) = O(1/|t|^{1+\varepsilon})$ ,  $|t| \rightarrow \infty$  であるとする。このとき  $f(t) \in V_0$  は、

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) q(s, t) ds$$

と表される。

(証明)  $\varphi(t) = O(1/|t|^{1+\varepsilon})$  であるから、 $q(s, t)$  の定義は well-defined である。 $\{\varphi(t-n)\}_n \in l^2$ かつ  $\{\varphi(s-n)\}_n$  が正規直交することから  $t \in \mathbb{R}$  を固定すると、

$$q(t, s) = \sum_n \varphi(t-n) \varphi(s-n) \in L^2(\mathbb{R}(s)) \quad (7)$$

を得る。従って  $t$  を固定すると、任意の  $f(s) \in V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$  に対して  $f(s)q(s, t) \in L^1(\mathbb{R}(s))$  となる。更に

(注 1) : Banach 空間を張る基底系列の部分列をここでは basic sequence とよぶ。

(注 2) : coefficient functional

$\varphi(t) = O(1/|t|^{1+\varepsilon})$  であることから  $\varphi(s-n)$  が  $s$  に関して一様有界であり  $\sum_n |\varphi(t-n)|$  は  $s$  に関して一様収束する。よって  $t \in \mathbb{R}$  を固定したときに

$$\sum_n \varphi(t-n)\varphi(s-n) \text{ は } s \text{ に関して一様収束.} \quad (8)$$

式(7), (8) と  $\{\varphi(t-n)\}_n$  の正規直交性から,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} f(s)q(t,s)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s) \sum_n \varphi(t-n)\varphi(s-n)ds \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_n \varphi(t-n) \int_{\mathbb{R}} f(s)\varphi(s-n)ds \\ &= f(t) \end{aligned} \quad (10)$$

を得る.  $\square$

(定理 1 の証明)  $\hat{\varphi}^*(\omega) \neq 0$  は  $\{q(t,k)\}_k$  が  $V_0$  の Riesz 基底をなすことを意味する (Walter [4]). 式(2) のフーリエ変換のもとでの  $V_0$  の像を  $\hat{V}_0$  で表す。このフーリエ変換が ( $\sqrt{2\pi}$  の係数を無視すれば) 等距離性をもつ<sup>(注3)</sup> ことから,  $\{\hat{q}(\omega,k)\}_k$  は  $\hat{V}_0$  の Riesz 基底をなすことがいえる。

$\{q(t,t_k)\}_k$  が  $t_k = k + \delta_k$  として Riesz 基底になることをいには,  $\{\hat{q}(\omega,t_k)\}_k$  が  $\hat{V}_0$  の Riesz 基底になっていることを示せば十分である。一方で

$$\begin{aligned} \hat{q}(\omega,k) &= \sum_n \varphi(k-n) \mathcal{F}[\varphi(t-n)](\omega) \\ &= \sum_n \varphi(k-n) \hat{\varphi}(\omega) e^{-ink\omega} \\ &= \left( \sum_n \varphi(n) e^{ink\omega} \right) \hat{\varphi}(\omega) e^{-ik\omega} \\ &= \hat{\varphi}^*(\omega) g_k(\omega), \end{aligned} \quad (11)$$

ここで  $\hat{\varphi}^*(\omega)$  および  $g_k(\omega)$  は

$$\hat{\varphi}^*(\omega) = \sum_n \varphi(n) e^{ink\omega} \quad (12)$$

$$g_k(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) e^{-ik\omega} \quad (13)$$

である。同様にして

$$\hat{q}(\omega,t_k) = \hat{\varphi}_{\delta_k}^*(\omega) g_k(\omega) \quad (14)$$

但し

$$\hat{\varphi}_{\delta_k}^*(\omega) = \sum_n \varphi(n + \delta_k) e^{in\omega} \quad (15)$$

である。補題 1 によりここでは

$$\Delta = \sum_k \|q_k^*\| \|\hat{q}(\omega, t_k) - \hat{q}(\omega, k)\| < 1 \quad (16)$$

を示せばよい。但し  $\{q_k^*\}_k$  は  $\hat{V}_0$  における  $\{\hat{q}(\omega, k)\}_k$  に関する係数汎関数列である。ところで任意の  $\{c_k\}_k \in l^2$  について,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k c_k \hat{q}(\omega, k) \right\| &= \left\| \hat{\varphi}^*(\omega) \sum_k c_k \hat{\varphi}(\omega) e^{-ik\omega} \right\| \\ &\geq \inf |\hat{\varphi}^*(\omega)| \left\| \mathcal{F} \left[ \sum_k c_k \varphi(t-k) \right] (\omega) \right\| \\ &= \sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega)| \left( \sum_k |c_k|^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega)| |c_{k_0}| \\ &= \sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega)| \left| q_{k_0}^* \left( \sum_k c_k \hat{q}(\omega, k) \right) \right| \end{aligned} \quad (17)$$

から

$$\|q_{k_0}^*\| \leq (\sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega)|)^{-1} \quad (18)$$

を得る。ここで式(17)は  $\varphi(t)$  の正規直交性と Parseval の等式による。よって式(11), (14), (18)から

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{\sum_k \|(\hat{\varphi}_{\delta_k}^*(\omega) - \hat{\varphi}^*(\omega))g_k(\omega)\|}{\sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega)|} \\ &= \frac{\sum_k \left\| \sum_n (\varphi(n + \delta_k) - \varphi(n)) e^{in\omega} \hat{\varphi}(\omega) e^{-ik\omega} \right\|}{\sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega)|} \\ &\leq \frac{\sum_k \sum_n |\varphi(n + \delta_k) - \varphi(n)| \|\hat{\varphi}\|}{\sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega)|} \end{aligned} \quad (19)$$

である。 $\varphi$  は  $(n, n+1)$  で微分可能であり、正規直交するので、 $\|\hat{\varphi}\| = \sqrt{2\pi} \|\varphi\| = \sqrt{2\pi}$  および Lagrange の平均値の定理から

$$\begin{aligned} & \sum_k \sum_n |\varphi(n + \delta_k) - \varphi(n)| \\ &= \sum_k |\delta_k| \sum_n |\varphi'(\xi_{n,k})| \end{aligned} \quad (20)$$

がいえる。ここで  $\xi_{n,k}$  は区間  $(n, n + \delta_k)$  における中間点である。式(16), (19), (20)から

(注 3) :  $\|\mathcal{F}[\varphi]\| = \sqrt{2\pi} \|\varphi\|$  となることを指す。

$$\frac{\sqrt{2\pi} \sum_k |\delta_k| \sum_n \sup_{U_o(n,\delta)} |\varphi'(x)|}{\sqrt{2\pi} \inf |\tilde{\varphi}^*(\omega)|} < 1 \quad (21)$$

をいえばよい。従って

$$\sum_k |\delta_k| < \frac{\inf |\tilde{\varphi}^*(\omega)|}{\sum_n \sup_{U_o(n,\delta)} |\varphi'(x)|} \quad (22)$$

にとれば  $\{q(t, t_k)\}_k$  が Riesz 基底であることがいえる。この  $\{q(t, t_k)\}_k$  に双直交となる基底を  $\{S_k(t)\}_k$  と書くと、補題 2 より任意の  $f(t) \in V_0$  に対して、

$$f(t) = \sum_k \langle f(t), q(t, t_k) \rangle S_k(t) = \sum_k f(t_k) S_k(t)$$

を得る。  $\square$

### [Remark 1]

(1) もし  $\varphi$  が cardinal スケーリング関数 (Walter [5] を見よ) であれば  $\tilde{\varphi}^*(\omega) = 1$  である。

(2) 定理 1 の条件 2 での  $\sum_n \sup_{(n,n+1)} |\varphi'(t)| < \infty$  の代わりに、ある  $\varepsilon > 0$ ,  $|t| \rightarrow \infty$  に対して  $|\varphi'(t)|_{(n,n+1)} = O(1/|n|^{1+\varepsilon})$  とおいても定理 1 は依然として成立する。 $|\varphi'(t)| = O(1/|t|^{1+\varepsilon})$  の成り立つことを調べるのは容易である。

(3) 現実には標本化を行うのは有限の時間、たとえば  $[-N, N]$  である。Paley-Wiener [6] がすべての  $k$  について  $\delta_k = -\delta_{-k}$ ,  $|\delta_k| < 1/4$  を要求したのに対し、我々の定理では全体としてその和が式 (5) を満たしてさえいれば個々の  $\delta_k$ , ( $k \in [-N, N] \cap \mathbb{Z}$ ) に厳しい制約があるわけではない。但しここで式 (5) の上界は  $\delta = \sup_k |\delta_k|$  に依存する。

(4)  $f$  が  $V_0$  にない場合でも我々の式を使うことができる。但しその場合には aliasing による誤差を見積もらなければならない (Walter [5] を見よ)。

(5)  $\{S_k(t)\}_k$  は  $\{q(t, k + \delta_k)\}_k$  から双直交基底を求めることによって計算することができる。標本化が一定周期すなわち  $\delta_k = 0$  のときには式 (6) は式 (4) と一致する。

### 3. 双直交ウェーブレット空間における不均等標本化

$\varphi(t)$  が正規直交スケーリング関数ではなくて双直交スケーリング関数<sup>(注4)</sup>である場合には定理 1 は成り立たない。しかしここでは類似の式を示すことができる。

[定理 2] いま  $\{\varphi(t), \tilde{\varphi}(t)\}$  が双直交 MRA $\{V_m, \tilde{V}_m\}$

(但し  $V_0 = \tilde{V}_0$  が成り立つものとする) における連続な双直交スケーリング関数とし、次の条件を満たすものとする。

(1) ある  $\varepsilon > 0$ ,  $|t| \rightarrow \infty$  に対して  $\varphi(t) = O(1/|t|^{1+\varepsilon})$ ,  $\tilde{\varphi}(t) = O(1/|t|^{1+\varepsilon})$  である。

(2)  $\tilde{\varphi}(t)$  は各区間  $(n, n+1)$  において微分可能であり、 $\sum_n \sup_{(n,n+1)} |\tilde{\varphi}'(x)| < \infty$  が成り立つ。

(3)  $\tilde{\varphi}^*(\omega) \neq 0$  が成り立つ。

このとき  $\delta_n \in (-1, 1)$  の系列が

$$\sum_n |\delta_n| < \frac{\sqrt{2\pi} \inf_\omega |\tilde{\varphi}^*(\omega) G(\varphi)(\omega)|}{\|G(\varphi)\|_{L^2(0, 2\pi)} \sum_n \sup_{U_o(n, \delta)} |\tilde{\varphi}'(x)|} \quad (23)$$

但し

$$\delta = \sup_k |\delta_k|, \quad \sum_n \sup_{U_o(n, \delta)} |\tilde{\varphi}'(x)| \neq 0$$

を満たすならば、任意の  $f(t) \in V_0$  に対して、

$$f(t) = \sum_n f(n + \delta_n) S_n(t) \quad (24)$$

となる系列  $\{S_n(t)\}_n \subset V_0$  が存在する。ここで  $G(\varphi) = (\sum_k |\varphi(\omega + 2k\pi)|^2)^{1/2}$ ,  $\tilde{\varphi}^*(\omega) = \sum_n \tilde{\varphi}(n) e^{in\omega}$  である。

(証明)

$$q(t, s) = \sum_n \varphi(t - n) \tilde{\varphi}(s - n) \quad (25)$$

とおく。補題 2 と同様に任意の  $f(t) \in V_0$  に対して  $f(t) = \int_R f(s) q(t, s) ds$  および任意の  $g(s) \in \tilde{V}_0$  に対して  $g(s) = \int_R g(t) q(t, s) dt$  の成り立つことがわかる。もし  $\tilde{\varphi}^*(\omega) \neq 0$  ならば Walter [4] と同様に  $\{q(t, k)\}_k$  が  $V_0$  の Riesz 基底であることは容易に示すことができる。従って  $\{\hat{q}(\omega, k)\}_k$  は  $\hat{V}_0$  の Riesz 基底である。 $\{q(t, k + \delta_k)\}_k$  が  $V_0$  の Riesz 基底であることを証明するためには、 $\{\hat{q}(\omega, k + \delta_k)\}_k$  が  $\hat{V}_0$  の Riesz 基底であることを証明するだけでよい。

定理 1 の証明にあるように、

$$\hat{q}(\omega, k) = \hat{\varphi}^*(\omega) g_k(\omega) \quad (26)$$

$$\hat{q}(\omega, k + \delta_k) = \hat{\varphi}_{\delta_k}^*(\omega) g_k(\omega) \quad (27)$$

(注4) : Cohen ら [1], Long ら [3] を見よ。

である。

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_k \|q_k^*\| \|\hat{q}(\omega, k + \delta_k) - \hat{q}(\omega, k)\| \\ &\leq \sup_k \|q_k^*\| \sum_k \left\| \sum_n (\tilde{\varphi}(n + \delta_k) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\varphi}(n)) e^{in\omega} \hat{\varphi}(\omega) e^{-ik\omega} \right\| \\ &\leq \sup_k \|q_k^*\| \|G(\varphi)\|_{L^2(0,2\pi)} \\ &\quad \times \sum_k |\delta_k| \sum_n |\tilde{\varphi}'(\xi_{n,k})|\end{aligned}$$

とおく。ここで、 $\xi_{n,k}$  は区間  $(n, n + \delta_k)$  における中間点で、 $\{q_k^*\}_k$  は  $\hat{V}_0$  内での  $\{\hat{q}(\omega, k)\}_k$  に関する係数汎関数である。

ところで任意の  $\{c_k\}_k \in l^2$  について

$$\begin{aligned}&\left\| \sum_k c_k \hat{q}(\omega, k) \right\| \\ &= \left\| \sum_k c_k \hat{\varphi}^*(\omega) \hat{\varphi}(\omega) e^{-ik\omega} \right\| \\ &= \left\| \hat{\varphi}^*(\omega) G(\varphi) \sum_k c_k e^{-ik\omega} \right\|_{L^2(0,2\pi)} \\ &\geq \sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega) G(\varphi)| \left( \sum_k |c_k|^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega) G(\varphi)| |c_{k_0}| \\ &= \sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega) G(\varphi)| \left| q_{k_0}^* \left( \sum_k c_k \hat{q}(\omega, k) \right) \right|\end{aligned}$$

であるから、

$$\sup_k \|q_k^*\| \leq (\sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^* G(\varphi)|)^{-1}$$

を得る。もし

$$\begin{aligned}\Delta &\leq \frac{\|G(\varphi)\|_{L^2(0,2\pi)}}{\sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^* G(\varphi)|} \sum_k |\delta_k| \sum_n \sup_{U_o(n,\delta)} |\tilde{\varphi}'(x)| \\ &< 1\end{aligned}$$

すなわち

$$\sum_k |\delta_k| < \frac{\sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^* G(\varphi)|}{\|G(\varphi)\|_{L^2(0,2\pi)} \sum_n \sup_{U_o(n,\delta)} |\tilde{\varphi}'(x)|} \quad (28)$$

であるならば  $\{q(t, k + \delta_k)\}_k$  は  $V_0$  の基底となる。 $V_0$  の中でこの  $\{q(t, k + \delta_k)\}_k$  に双直交となる基底を  $\{S_k(t)\}_k$  と書くと、任意の  $f \in V_0$  に対して  $f(t) = \sum_k \langle f(s), q(s, k + \delta_k) \rangle S_k(t) = \sum_k f(k + \delta_k) S_k(t)$  となる。□

[Remark 2]

(1) もし  $\varphi(t)$  が直交スケーリング関数であるならば、 $G(\varphi) = 1$  であり式(28)は式(22)と同じになる。

(2)  $\varphi$  と  $\tilde{\varphi}$  は対称であるので、 $\varphi$  と  $\tilde{\varphi}$  を交換しても定理は成立する。

(3)  $\|G(\varphi)\|_{L^2(0,2\pi)} \leq \sqrt{2\pi} \sup |G(\varphi)|$  であるので、式(28)は

$$\sum_k |\delta_k| < \frac{\inf |\hat{\varphi}^* G(\varphi)|}{\sup |G(\varphi)| \sum_n \sup_{U_o(n,\delta)} |\tilde{\varphi}'(x)|}$$

で置き換えることができる。

実践的な事例においては、 $\varphi$  は直交でも双直交でもない場合がほとんどであるので、我々はこれをなんとか解決したい。次に述べる系は定理 2 を一般のウェーブレット部分空間に適用できるように拡張したものである。

[系 1] 直交に関する部分を除いて、定理 1 と同様の仮定のもとで

$$\begin{aligned}\sum_k |\delta_k| &< \frac{\sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega)/G(\varphi)|}{\|(\hat{\varphi}^*(-\omega)G(\varphi))^{-1}\|_{L^2(0,2\pi)}} \\ &\quad \times \frac{1}{\sum_n \sup_{U_o(n,\delta)} \left| \sum_k \varphi'(x - k) \varphi(-k) \right|}\end{aligned}$$

なる  $\delta_k \in (-1, 1)$  を取る。但しここで  $\sum_n \sup_{U_o(n,\delta)}$

$$\left| \sum_k \varphi'(x - k) \varphi(-k) \right| \neq 0 \text{ であるとする。任意の } f(t) \in V_0 \text{ について}$$

$$f(t) = \sum_k f(k + \delta_k) S_k(t)$$

を満足する  $S_k(t) \in V_0$  が存在する。ここで、 $G(\varphi) = (\sum_k |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2)^{1/2}$  である。

(証明)  $q(s, t) = \sum_n \varphi(s - n) \varphi(t - n)$  とおくと、 $\hat{\varphi}^*(\omega) \neq 0$  であれば  $\{q(s, k)\}_k$  は  $V_0$  の Riesz 基底である。 $V_0$  の中でこの  $\{q(t, k)\}_k$  に双直交となる基底を  $\{\tilde{q}_k(s)\}_k$  と書く。このとき Walter [5] によると  $\tilde{q}_k(s) = \tilde{q}_0(s - k)$  である。 $q(s, k) = q(s - k, 0)$  であ

るので、 $\{q(s, 0), \tilde{q}_0(s)\}$  は双直交スケーリング関数であることがわかる。定理 2 と Remark 2 の (2) より

$$\sum_k |\delta_k| < \frac{\sqrt{2\pi} \inf |\hat{q}^*(\cdot, 0)G(\tilde{q}_0)|}{\|G(\tilde{q}_0)\|_{L^2(0, 2\pi)} \sum_n \sup_{U_o(n, \delta)} |q'(x, 0)|} \quad (29)$$

なる  $\delta_k \in (-1, 1)$  を取ればよい。すると任意の  $f \in V_0$  について

$$f(t) = \sum_k f(k + \delta_k) S_k(t)$$

を満足する  $\{S_k(t)\}_k$  が存在する。ここで、

$$\begin{aligned} \hat{q}^*(\omega, 0) &= \sum_m \sum_n \varphi(m - n) \varphi(-n) e^{im\omega} \\ &= \hat{\varphi}^*(\omega) \hat{\varphi}^*(-\omega) \end{aligned} \quad (30)$$

$$q'(x, 0) = \sum_n \varphi'(x - n) \varphi(-n) \quad (31)$$

である。Walter [5] の定理 9.2 より

$$\tilde{\hat{q}}_0(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) / (\hat{\varphi}^*(-\omega) G^2(\varphi))$$

である。従って

$$\begin{aligned} G(\tilde{q}_0)^2 &= \sum_n |\tilde{\hat{q}}_0(\omega + 2n\pi)|^2 \\ &= \sum_n \left| \frac{\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)}{\hat{\varphi}^*(-\omega) G^2(\varphi)} \right|^2 \\ &= \frac{\sum_n |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2}{|\hat{\varphi}^*(-\omega)|^2 G^4(\varphi)} \\ &= \frac{1}{|\hat{\varphi}^*(-\omega)|^2 G^2(\varphi)} \end{aligned} \quad (32)$$

である。式 (30), (31), (32) より、式 (29) は

$$\begin{aligned} \sum_k |\delta_k| &< \frac{\sqrt{2\pi} \inf |\hat{\varphi}^*(\omega) / G(\varphi)|}{\|(\hat{\varphi}^*(-\omega) G(\varphi))^{-1}\|_{L^2(0, 2\pi)}} \\ &\times \frac{1}{\sum_n \sup_{U_o(n, \delta)} \left| \sum_k \varphi'(x - k) \varphi(-k) \right|} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。□

[Remark 3]

(1) 実際の応用においては  $\varphi(t)$  を適切に選んで、式 (33) の右辺を十分大きくとり、必要とする  $\{\delta_k\}$  の範囲をカバーするように設計が行われる。

(2) しかし式 (33) の右辺が十分に大きくならない場合

であっても、我々の系 1 は依然として意味がある。現実の標本化においてはやむを得ずサンプリング時点に弱い変動の入ることがあり得る。しかし式 (33) を満たしていさえすれば、系 1 によって元の信号を再現することが可能になる。これに対し、Paley-Wiener [6] では  $t_k = -t_{-k}$  を満たすことが必要であるために、そのような状況では適用することができない。

(3) たとえば 2 次の B-スプライン曲線を  $\varphi(t)$  にとり、 $\varphi(t) = N_2(t) = t\mathbf{1}_{[0, 1]}(t) + (2-t)\mathbf{1}_{[1, 2]}(t)$  とすると<sup>(注5)</sup>、式 (33) の右辺は  $\sqrt{2\pi}/(3\|G^{-1}(\varphi)\|_{L^2(0, 2\pi)})$  となる。ここで  $G(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2 \frac{\omega}{2}}$  である。よって  $\|G^{-1}(\varphi)\|_{L^2(0, 2\pi)} \leq \sqrt{6\pi}$  を代入して  $\sqrt{2\pi}/(3\|G^{-1}(\varphi)\|_{L^2(0, 2\pi)}) \geq \frac{1}{3\sqrt{3}}$  を得る。この例では  $\sum_k |\delta_k| < \frac{1}{3\sqrt{3}}$  で  $\delta_k$  の変動できる範囲は Paley-Wiener よりも狭くなっているが、 $t_k = -t_{-k}$  とする必要はない。

(4) 式 (33) の右辺を大きくするには  $\varphi'(x)$  を小さくすることが必要であると予想される。しかしその場合にはこのウェーブレットによる部分空間が狭帯域信号の集合となり、表現できる信号の空間が狭くなってしまうおそれがある。従って  $\delta_k$  に対する余裕と信号空間の大きさとの関係が重要になろう。

#### 4. む す び

本論文では、標本化のタイミングが正確に周期的でない場合においても、一般的なウェーブレット部分空間に所属する信号を再生する方法を示した。信号が再生できるための条件は、Paley-Wiener の条件よりも緩やかにできる場合がある。

例として 2 次の B-スプライン曲線による補間を示した。

標本化時点のずれに対して余裕の大きいスケーリング関数がどのようなものであるかに興味がもたれる。応用上はそのようなウェーブレット関数部分空間が十分に大きな関数のクラスを表している場合が重要であろう。

**謝辞** 本研究に御協力を頂いた電気通信大学の橋本猛助教授、土屋英亮助手、および有益な御助言を頂いた査読者の方に感謝します。なお第一筆者は日本国政府から研究留学生の奨学金援助を受けている。

#### 文 献

- [1] A. Cohen, I. Daubechies, and J.C. Feauveau, "Bi-

(注5) : 関数  $\mathbf{1}_X(t)$  はインジケータ関数で  $t \in X$  のときに 1,  $t \notin X$  のときに 0 である。

- orthogonal bases of compactly supported wavelets,"  
Comm. Pure Appl. Math., vol.45, no.5, pp.485–560, June  
1992.
- [2] J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces,  
Springer-Verlag, New York Inc. 1984.
- [3] R. Long and D. Chen, "Biorthogonal wavelet bases  
on  $R^d$ ," Appl. Comp. Harmonic Analysis, vol.2, no.3,  
pp.230–242, July 1995.
- [4] G.G. Walter, "A sampling theorem for wavelet sub-  
spaces," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.38, no.2, pp.881–  
884, March 1992.
- [5] G.G. Walter, Wavelets and Other Orthogonal Systems  
with Applications, CRC Press Inc., Boca Raton, 1994.
- [6] R. Young, An Introduction to Non-harmonic Fourier Se-  
ries, Academic Press, NY, 1980.

(平成 8 年 4 月 24 日受付)

### 陳 文



平 2 中国武漢大・理・数学卒。平 5 同大  
大学院修士課程了。同年中国科学院数学研  
究所勤務。ウェーブレット理論とその応用  
の研究を行う。現在、電通大大学院博士後  
期課程在学中。情報理論とウェーブレット  
の研究に従事。

### 伊藤 秀一 (正員)



昭 39 東大・工・電子卒。昭 41 同大大学  
院修士課程了。昭 44 同大大学院博士課程  
了。同年電通大講師。現在、同大情報シス  
テム学研究科教授。情報理論とその応用の  
研究に従事。

### 志記 潤二



平 4 電通大・電気通信・応用電子卒。平  
6 同大大学院修士課程了。現在、同大大学  
院博士課程在学中。情報理論とその応用の  
研究に従事。